Comparaisons des premières formulations du Théorème de Bernoulli de l'hydrodynamique à un énoncé actuel

D'Alembert, dans l'article "Hydrodynamique" de l'*Encyclopédie* (1), date la naissance de cette discipline de 1738 à la publication de l'*Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli. L'encyclopédiste distingue Bernoulli de ses prédecesseurs car celui-ci a su, avec succès, appliquer aux fluides un principe régissant la mécanique : la conservation des forces vives. De cette manière, il donnait à la mécanique des fluides un fondement théorique stable.

Encore maintenant, l'enseignement de l'hydrodynamique se fait souvent selon une démarche parallèle au déroulement chronologique de l'édification de cette discipline. De nombreux ouvrages introduisent la dynamique des fluides par le théorème dit de Bernoulli. En effet, celui-ci peut-être perçu comme un élargissement à la dynamique de la loi de Pascal, qui permet de calculer les pressions en hydrostatique.

Paradoxalement, la pression n'apparaît pas dans l'*Hydrodynamica*, ou pas sous la forme qu'on lui donne aujourd'hui. Et il serait même difficile de donner catégoriquement un passage du traité dans lequel Bernoulli formule le théorème qui porte son nom. Cependant, les concepts, la méthode proposés par l'auteur ont une proximité évidente avec la démarche que l'on emploierait aujourd'hui pour résoudre les problèmes posés. L'évolution du discours autour de ce théorème permet donc de comprendre comment s'est construite la mathématisation de ce domaine de la physique.

L'*Hydrodynamica* peut susciter l'intérêt à bien des égards : on pourrait ainsi se pencher sur les méthodologies expérimentales de l'époque ou encore sur la description que l'ouvrage nous donne, au fil des citations d'autres auteurs, de la cohésion de la communauté scientifique et de la circulation des savoirs à cette époque. On a choisi ici de traiter l'aspect plus formel de l'évolution du contenu scientifique. Quels concepts, quelles hypothèses, quelles équations apparaissent dans les travaux de Bernoulli et de ses continuateurs ? Lesquels n'y figurent que de manière obscure voire pas du tout ? Quel élément nouveau et décisif Bernoulli a-t-il apporté à la mécanique des fluides pour que la communauté scientifique lui attribue la paternité de ce théorème ?

On se propose donc de procéder à l'analyse diachronique des éléments constitutifs de ce théorème et de leur formulation dans les travaux de Bernoulli et de ses proches successeurs : d'Alembert et Euler. Pour structurer cette analyse, on utilisera les énoncé et démonstration que l'on trouve dans l'ouvrage de référence de G. Bruhat (2).

1. Un énoncé actuel du théorème

Avant d'examiner les textes de Bernoulli et de ses contemporains, nous reprenons et discutons la formulation et la démonstration du théorème, telles qu'on peut les trouver dans le chapitre XXI du livre de cours de mécanique de Georges Bruhat. Cela nous permet de définir les notions à l'aide desquelles on étudiera les travaux des physiciens du XVIII^{eme} siècle.

Décrivons d'abord les hypothèses préalables à la démonstration du théorème.

Le mouvement étudié est permanent, ce qui signifie que les grandeurs le caractérisant ne dépendent que de la position dans l'espace. Ces grandeurs (la vitesse, l'accélération...) sont fonctions a priori de quatre degrés de liberté (le temps et les trois dimensions de l'espace). Mais cette hypothèse permet de considérer qu'il n'y a pas de dépendance explicite de ces fonctions en temps. Dans ce cas, les trajectoires des particules de fluide se confondent avec les lignes de courant, c'est-à-dire avec les courbes tangentes en tout point au vecteur vitesse.

On étudie alors un tube de champ, i.e. une partie de l'espace délimitée par un faisceau de lignes de champ (cf figure 1). Celui-ci est pris suffisamment étroit pour que l'on puisse considérer les grandeurs caractéristiques de l'écoulement homogènes sur la section du tube. Cette hypothèse d'**homogénéité sur la section** n'est pas contraignante ici, car on peut choisir le tube de champ aussi étroit que l'on veut ; mais elle aura son importance au regard des premières formulations du théorème.

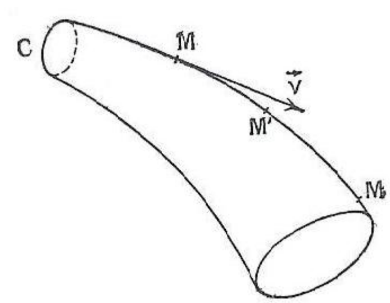

FIG. 425

FIG. 1 – Tube de champ (extrait de (2))

Autre hypothèse : **le fluide est incompressible**. Autrement dit, sa masse volumique (nommée "masse spécifique" par Bruhat) ne varie ni avec la position, ni dans le temps. Même si l'expression de fluide incompressible est passée dans l'usage, il serait plus approprié de parler d'écoulement incompressible. En effet, au-delà d'une certaine pression, les effets de compressibilité deviennent non négligeables quel que soit le fluide.

Le point de vue adopté par Bruhat pour démontrer le théorème de Bernoulli est un point de vue intégral. En effet, il effectue le bilan d'une grandeur extensive du fluide (en l'occurrence l'énergie) sur un volume fermé qui évolue entre deux instants séparés d'un intervalle de temps dt, et suppose cette grandeur conservée.

La combinaison des hypothèses d'écoulement permanent et incompressible permet de considérer l'évolution dans le tube de champ du volume fermé ABB'A' l'instant t, qui devient CDD'C' l'instant t+dt (cf figure 2). C'est sur ce volume qu'est effectué le bilan d'énergie. D'ailleurs, l'égalité des volumes ABDC et A'B'D'C' traduit la conservation du débit dans le tube de courant qu'induisent ces hypothèses.

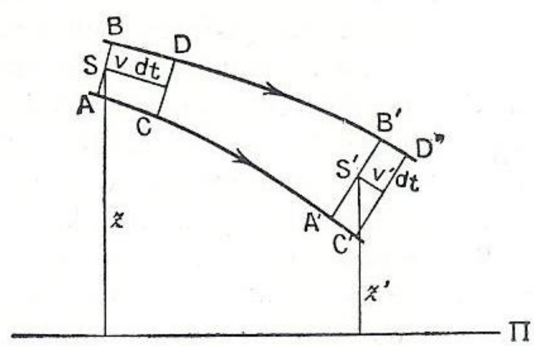

FIG. 426.

FIG. 2 – Bilan d'énergie (extrait de (2))

Avant de réaliser le bilan, on suppose de plus que **le fluide est parfait**. D'après la définition qu'en donne Bruhat (2.1), il s'agit "d'un fluide dans lequel aucune force ne s'oppose au glissement des diverses parties du fluide les unes sur les autres ou le long des parois". Il ne faut donc aucune dépense de travail pour déformer un tel fluide. Comme pour l'incompressibilité, cette idéalisation dépend du fluide mais aussi des caractéristiques de l'écoulement, et il serait donc plus adéquat de parler d'écoulement parfait.

Ainsi, la variation d'énergie cinétique du volume de fluide considéré est compensée par le travail de forces conservatives qui s'appliquent au système. On se limite au cas le plus usuel, où les forces en présence sont :

– les forces pressantes, et seules travaillent celles qui s'exercent sur AB et A'B' ;
– les forces de pesanteur.

Comme on associe une hauteur à l'énergie potentielle de pesanteur, on peut associer une hauteur à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique des forces pressantes (dite hauteur piézométrique). La conservation de l'énergie mécanique du système, à laquelle Bruhat se réfère par la "conservation des forces vives", se traduit alors par l'équation (valable le long d'une ligne de champ) :

$$\frac{p}{\rho.g} + \frac{v^2}{2g} + z = constante$$

Avec les notations p : la pression, v : la vitesse, z : l'altitude, ρ : la masse volumique et g : l'accélération de la pesanteur.

L'auteur énonce le théorème associé de la manière suivante : "Dans une conduite parcourue par un fluide parfait incompressible, la somme de la hauteur piézométrique, de la hauteur due à la vitesse et de la cote du point est la même en tous les points".

D'autres démonstrations de ce théorème sont possibles. On pourra faire ici mention de démonstrations qui utilisent les équations locales du mouvement (en particulier l'équation d'Euler des fluides parfaits) plutôt qu'un bilan sur un volume fermé. On aura l'occasion par la suite de revenir sur les formulations de ce type.

Notons enfin qu'il faut, avant de comparer cet énoncé aux premières approches du théorème de Bernoulli, prendre en considération la nature des ouvrages examinés. En effet, la *Mécanique* de Bruhat étant une œuvre à vocation d'enseignement, les articles y sont organisés de la manière jugée la plus pédagogique par l'auteur. Le schéma suivi est donc principalement déductif : les théorèmes sont énoncés, démontrés puis appliqués sur des exemples.

Au contraire, l'*Hydrodynamica* de Bernoulli (3) est construit principalement autour de questions et de problèmes à résoudre. Ainsi, si les deux premières sections tiennent davantage le rôle d'état de l'art sur les problèmes d'hydraulique, les suivantes sont explicitement organisées autour de la résolution d'une question précise. Par exemple, la section troisième : "Sur la Promptitude des fluides coulant d'un vase formé de quelque manière que ce soit, à travers une ouverture quelconque". De cette manière, la construction générale du traité de Bernoulli s'apparente davantage à celle d'un texte de recherche qu'à celle d'un manuel pédagogique.

On peut aussi justifier de cette manière la tendance observée dans ce traité à passer en revue, pour chaque problème, les différentes situations pratiques rencontrées. Ainsi qu'on vient de le voir, une des questions de la section III est l'estimation de la vitesse de vidange d'un vase, et en particulier d'un vase cylindrique. Bernoulli traite successivement les cas où l'ouverture est très petite devant la section du vase (§14), où l'ouverture et la section sont égales (§15), où l'on donne à l'eau une impulsion initiale (§18), où le cylindre est posé obliquement (§20) etc...

Comme il s'agit-là de théories nouvelles, Bernoulli a le soucis d'appuyer la légitimité de ses résultats, ainsi il décrit en détails sa démarche scientifique et les garanties de la solidité de ses affirmations : "j'ai communiqué la plupart des choses en privé à des amis, [...] j'ai expliqué certaines devant notre Société, avant que l'établisse quelque expérience" (3.1). Cela se traduit également par de nombreuses références à des expériences pratiques, en fin de chaque section ; et Bernoulli encourage la vérification de ses propos par les lecteurs.

On peut trouver, dans une bien moindre mesure, une forme analogue dans les travaux de d'Alembert étudiés ici (4). L'auteur souhaite clairement donner une forme complète à la théorie, et l'aspect exprimental n'est que beaucoup plus rarement évoqué que chez Bernoulli. D'ailleurs il écrit dans la préface du *Traité des Fluides* : "En vain l'Expérience nous instruira-t'elle d'un grand nombre de faits : des vérités de cette espèce nous serons presque entièrement inutiles, si nous ne nous appliquons avec soin [...] à saisir [...] le tronc principal qui les unit". Aussi, on trouve dans l'*Hydrodynamica* un certain nombre d'évaluations numériques sur des cas particuliers d'écoulements (par exemple : Section III, §18, où l'on compare l'augmentation de montée potentielle entre un écoulement dans lequel le fluide est initialement au repos et un autre où on lui communique une certaine impulsion) ; elles sont quasiment absentes du *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Cependant, la réflexion est conçue selon le schéma suivant : un bref exposé des principes généraux, puis l'énoncé d'une question pratique à résoudre, enfin la réponse proposée par d'Alembert et divers corollaires et remarques associés.

Enfin, le traité d'Euler que nous citerons ici (5) est d'une nature différente. L'auteur y propose une théorie de la mécanique des fluides, qu'il cherche à rendre la plus générale possible. On ne trouve pas dans ce texte-là de références aux mesures expérimentales, ni même d'évaluation sur des dispositifs particuliers des caractéristiques de l'écoulement. Mais on peut supposer que cet ouvrage, qui est postérieur aux autres traités auxquels nous faisons allusion, est une forme de conclusion aux recherches de cette génération de savants. Il s'appuie sans doute sur divers travaux, qu'Euler évoque d'ailleurs indirectement, par exemple : "Quelques sublimes que soient les recherches sur les fluides dont nous sommes redevables Mrs. Bernoullis, Clairaut, & d'Alembert, elles découlent si naturellement de mes formules générales qu'on ne sauroit assés admirer cet accord [...]" (§I de *La Continuation des Recherches sur la Théorie du Mouvement des Fluides*). Ces textes indiquent quel pouvait-être l'état des connaissances théoriques en mécanique des fluides en 1755 ; et nous nous en servirons pour estimer quelles réponses les savants de l'époque pouvaient alors donner aux problèmes pratiques du type de ceux étudiés par Bernoulli et d'Alembert.

2. La quantité conservée et le fluide parfait

À la fin du XVII^{eme} siècle, Huygens puis Leibniz avaient contribué à la rationalisation de la mécanique en énonçant le principe de conservation des forces vives (dans certaines situations de chocs par exemple). Aujourd'hui, on parlerait plutôt de conservation de l'énergie, et ce principe a acquis un degré de généralité qui va bien au-delà de la seule mécanique. Cela dit, l'étude des élargissements possibles du théorème de Bernoulli, en incluant des termes issus d'autres domaines de la physique (thermodynamique, électromagnétisme pour les fluides chargés etc...) excède le cadre de ce travail.

L'apport fondamental des travaux de Bernoulli à la dynamique des fluides réside sans doute dans la méthode avec laquelle il applique le principe de conservation des forces vives à ces milieux.

Plutôt que d'employer le terme de forces vives, Bernoulli préfère parler d'égalité de la “montée potentielle” et de “la descente actuelle”. On peut penser que cette préférence soit liée au caractère empirique de ces concepts, alors que la notion de forces vives reste plus abstraite. Quoi qu'il en soit, il s'agit bien de déterminer une grandeur qui demeure constante au cours du mouvement.

La montée potentielle (3.2) désigne la hauteur que peut atteindre le centre de gravité du système projeté vers le haut avec la vitesse qu'il a dans l'écoulement. La descente actuelle (3.2) est “la hauteur verticale selon laquelle descend le centre de gravité , après que chaque particule aurait été mise au repos”. Cette seconde définition est peu claire, mais il semble que cette phrase cherche avant tout à mettre l'accent sur la conversion de la hauteur de chute en vitesse des particules, qui doivent alors être mises au repos. Il est donc ici question de la hauteur liée à l'énergie potentielle associée au fluide. L'égalité de l'un et de l'autre traduit alors la conservation de l'énergie mécanique de l'ensemble. On peut quand même percevoir une nuance : Bernoulli semble égaliser davantage le *transfert* de la hauteur en vitesse à celui de la vitesse en hauteur, ce qui évite d'avoir recours au concept d'une grandeur unique qui existerait sous une certaine forme pour les particules immobiles en hauteur et sous une autre pour les particules en mouvement. On remarque ici que le terme d'énergie potentielle élastique est absent de ces considérations, point sur lequel on reviendra lorsqu'il sera question de la pression.

Le problème principal dans le cadre duquel Bernoulli met en application ce principe est celui des vidanges de vases munis d'un orifice. Nous nous servirons donc de cet exemple - et plus précisément du cas des vases cylindriques - pour illustrer le propos.

La procédure employée est en fait très proche de celle que l'on a décrite dans la Partie 1. Bernoulli examine l'écoulement du fluide entre deux instants infiniment proches, et évalue les variations infinitésimales des montées potentielles et descentes actuelles qui s'y rapportent. En les égalisant, il trouve l'équation diffrentielle régissant le mouvement. Celle-ci fait intervenir deux variables : avec les notations du texte, x qui désigne la hauteur au-dessus de l'orifice, et v : la hauteur associée à la vitesse; v n'étant (comme on le verra dans la Partie 3) fonction que de x, cette équation est intégrable avec les méthodes analytiques connues alors (3.3).

Mais la limitation de la conservation de l'énergie au strict domaine de la mécanique ne permet pas d'appliquer ce principe dans tous les cas. Par exemple, un écoulement dans lequel de l'énergie est dissipée par friction (c'est-à-dire que l'énergie mécanique du système est convertie en chaleur), ne peut pas être traité dans le cadre d'une théorie qui ne sait pas prendre en compte l'échauffement du fluide (ce qui est évidemment le cas des travaux de Bernoulli et de ses contemporains). C'est pour s'affranchir de ce problème que Bruhat se place dans l'hypothèse des fluides parfaits.

Et Bernoulli a pleinement conscience des limites du domaine de validité de ses calculs quant à cette question. On peut lire en effet (3.4) : que rien ne s'oppose à l'application de l'égalité de la montée potentielle et de la descente actuelle, si l'on fait abstraction "des frictions, de la ténacité, de la résistance de l'air".

La procédure employée par d'Alembert est largement comparable à celle de Bernoulli : il effectue un bilan d'énergie entre t et t+dt. Bilan qu'on pourrait d'ailleurs aussi bien considérer comme l'intégration, sur la région de déplacement du fluide, du principe fondamental de la dynamique.

On lit en effet (4.1) que le principe de conservation des forces vives se traduit, dans le cas simple où le fluide est à l'équilibre, par une intégrale de la "force accélératrice" ϕ nulle sur l'ensemble du fluide soit $\int \phi.dx = 0$. Comme ϕ est l'accélération, c'est-à-dire $\frac{dv}{dt}$, on en déduit que $\int dv.dx = 0$. Les cas dynamiques sont traités de manière analogue (4.2), à la différence que l'intégrale nulle a pour argument ϕ - les forces par unité de masse qui s'appliquent au fluide.

En revanche, l'approche d'Euler est très distincte de celle de Bernoulli. Il ne raisonne pas en termes de bilan intégral sur l'écoulement du fluide, mais à l'aide d'équations locales du mouvement. On peut, depuis ces équations, retrouver sans difficulté le caractère non dissipatif de l'écoulement, mais ceci n'est pas d'un intérêt fondamental pour l'étude qui nous occupe et n'apparaît pas dans les traités étudiés ici (même si Euler avait sans doute conscience que cette propriété est contenue dans ses équations).

On constate ici l'importance qu'a pu avoir le calcul différentiel pour la construction de l'hydrodynamique ; on peut aussi s'étonner de l'aisance qu'ont acquise ces savants dans la manipulation d'outils mathématiques pourtant neufs (ils ont alors une cinquantaine d'années) et vraisemblablement très différents des concepts usuels de la physique de l'époque. La maîtrise du calcul différentiel nécessite une réflexion sur des objets mathématiques subtils, tels les limites ou l'infini ; celle-ci semble déjà très poussée, puisqu'on voit Bernoulli faire référence à l'idée d'ordre d'un développement limité par exemple (e.g. : 3.5).

3. L'hypothèse du parallélisme des tranches

L'hypothèse d'homogénéité sur la section du tube de champ, dont on faisait mention précédemment, permet de paramétrer la vitesse dans l'écoulement par la seule abscisse curviligne du point considéré sur la ligne de champ. Il ne sera en fait pas nécessaire de faire figurer cette abscisse dans l'équation finale, puisque seule la cote associée intervient. Mais l'idée importante demeure : on cherche à réduire le nombre de paramètres spatiaux dont la vitesse - qui caractérise l'écoulement - dépend.

Dans le problème de la vidange d'un vase, Bernoulli est confronté à une difficulté du même ordre. En effet, si l'on considère que la vitesse du fluide n'est pas la même sur toute la section du vase, celle-ci devrait être paramétrée par trois coordonnées. À moins d'un autre type de simplification, on serait logiquement amené à considérer des équations différentielles faisant intervenir quatre types d'éléments différentiels (les trois coordonnées de l'espace et le temps). Or ce type d'équation ne peut-être résolu avec les connaissances analytiques de l'époque (c'est ce que remarque Euler, confronté à un problème analogue dans la section XXV des *Principes Généraux du Mouvement des Fluides*).

Il lui est donc nécessaire de simplifier cette question en admettant que la vitesse est la même sur toute une section du vase, et que cette vitesse est normale à la section. De cette manière, Bernoulli introduit un découpage du fluide en tranches, d'épaisseurs infinitésimales, parallèles les unes aux autres, et dans lesquelles la vitesse est homogène. Cette hypothèse s'appuie sur l'observation de l'uniformité de la surface au cours de l'écoulement (qui reste vraie jusqu'à ce que le volume d'eau au-dessus de l'orifice soit "petit").

Bernoulli développe même une idée qui semble être une conception embryonnaire de la notion de tubes de courants : il rapporte l'observation exprimentale de particules de cire placées dans l'eau au cours d'une vidange (3.6). L'allure du mouvement des particules est décrit à l'aide de la figure reportée ci-dessous.

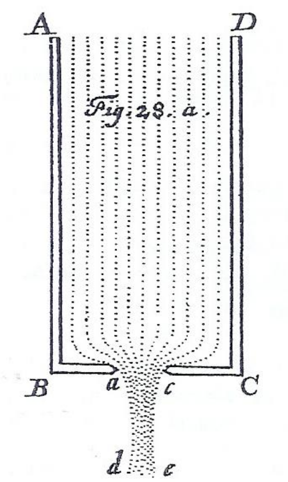

FIG. 3 – Mouvement des particules (extrait de (3))

Cela apporte du crédit à l'hypothèse d'une vitesse homogène et normale à la couche de fluide, en dehors de la région située près de l'orifice.

D'Alembert, à l'aide d'arguments identiques se place également dans le cadre de cette hypothèse. Il donne l'énoncé d'une propriété qui en découle (4.3) : "je dis que la vitesse de chaque tranche sera en raison inverse de sa largeur". Cela traduit la conservation du débit volumique, qui n'est d'ailleurs vraie que dans le cadre d'écoulements incompressibles (ce dont l'auteur ne semble pas avoir conscience, sans doute car la vitesse des écoulements fluides accessibles à l'expérience à cette époque ne permettait pas, ou peu, de voir les effets de compressibilité).

Bernoulli utilise également la conservation du débit sans la formuler explicitement, il affirme que la vitesse d'écoulement est inversement proportionnelle à la "grandeur" de la section (3.7). On remarquera au passage que, dans l'*Hydrodynamica*, comme dans les traités de d'Alembert, il existe une certaine ambiguïté autour de la notion de grandeur qui, selon le nombre de dimensions de l'écoulement (soit un écoulement plan à deux dimensions, soit un écoulement ayant une symétrie de révolution, à trois dimensions), pourrait désigner de la même manière une longueur ou une surface. Nous reviendrons sur cette question en évoquant le problème de l'homogénéité des formules dans ces traités, en Partie 6.

Avec l'idée de tranches, Bernoulli introduit une évolution conceptuelle importante. En effet, la tranche est un objet fictif, sur lequel on développe les outils mathématiques ; sa position, sa vitesse sont déterminées, néanmoins c'est une construction du physicien. À ce titre, on peut comprendre le modèle des tranches comme un premier pas vers le modèle lagrangien (de particules mésoscopiques) du fluide.

En effet, on a réduit les dimensions du volume total de fluide selon une direction, de manière à le concevoir comme une série de couches infiniment fines, contenant une quantité fixe de matière. Selon la description de Lagrange d'un fluide (voir par exemple : 6), celui-ci est conçu comme la réunion de volumes particulaires déformables, dont les trois dimensions sont infinitésimales, chacun contient une quantité fixe de matière, et ce sont ces unités dont on donne les caractéristiques : position, vitesse...

Dans les textes de Bernoulli - comme dans ceux de d'Alembert - quand l'auteur se réfère à la notion de particule, il ne faut pas y voir ce type de modèle : il s'agit pour eux des constituants élémentaires et indivisibles de la masse fluide. On lit par exemple dans l'*Encyclopédie* (1) : "tout fluide est un composé de particules faciles à se mouvoir, & qui sont liées entre elles de maniere qu'elles alterent & changent réciproquement leurs mouvemens.". La particule serait donc conçue comme 'l'atome', l'unité matérielle de fluide.

Ce modèle très élaboré de particule fluide figure pourtant déjà dans le traité d'Euler. D'ailleurs on conçoit difficilement que le raisonnement qui se fonde sur les équations locales puisse être fait en-dehors du cadre du modèle particulaire des fluides. La description qu'il donne de ces "volumes" constitutifs du fluide (5) est presque troublante tant elle est proche (aux notations près) de la description que l'on en fait dans les textes contemporains.

4. L'écoulement permanent

Nous ne développerons pas beaucoup ce point car ni Bernoulli, ni d'Alembert n'utilisent l'hypothèse d'écoulement permanent afin de traiter le problème de la vidange. Dans la majorité des cas, la vitesse initiale du fluide dans le vase est prise nulle. Ils étudient donc les variations de la vitesse d'écoulement du fluide au cours du temps dans toute leur généralité. Cela donne lieu à des développements calculatoires parfois très complexes dans l'*Hydrodynamica*, car Bernoulli effectue explicitement les opérations d'intégration. Citons par exemple la détermination des temps de vidange au premier ordre du rapport $\frac{section\ de\ l'orifice}{section\ du\ vase}$, dans la partie IV, §10 [1]

[1]Bernoulli s'y propose d'intégrer (avec α, m et n constantes) :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{n^2 a}{2n^2 - m^2\alpha^2}\right) \cdot \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2\alpha^2}{n^2}} - \left(\frac{x}{a}\right)\right)}$$

C'est notamment en raison de la difficulté technique du problème général que l'auteur étudie des cas limites, plus simples, notamment celui où l'ouverture est très petite devant la section. D'ailleurs, ce cas est en pratique assez proche d'un écoulement permanent, dans la mesure où la hauteur d'eau dans le vase varie lentement et on attend donc que les variations de la vitesse se fassent selon des temps caractéristiques également longs.

On peut remarquer que Bernoulli et d'Alembert examinent tous les deux le problème du vase où le liquide est maintenu constamment à la même hauteur. Ce procédé peut-être considéré comme une manière de se placer dans les conditions d'un écoulement permanent. C'est d'ailleurs l'un des rares points ou l'un et l'autre savants arrivent à des conclusions différentes. Selon l'analyse de d'Alembert (4.4), leur désaccord relève de la vitesse à donner à la tranche de fluide nouvellement admise dans le vase, ce qui dépend essentiellement de la procédure expérimentale. Pour se placer dans les conditions d'un écoulement permanent, cette vitesse devrait bien sûr être égale à celle qu'avait la tranche qui la précédait.

En somme, la recherche de simplicité dans la résolution pratique des questions amène ces auteurs à résoudre des cas s'approchant des conditions d'un écoulement permanent.

Dans les traités d'Euler, la question n'est pas posée, puisqu'il n'y a pas d'étude explicite d'une situation de vidange. Cependant, le formalisme utilisé par Euler est tout à fait adapté au traitement de cette hypothèse : il revient à dire que la dépendance des diverses fonctions de l'écoulement dans le paramètre temps est nulle et donc que les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles.

5. L'incompressibilité, la question de la pression

On peut s'étonner de l'absence de la pression dans les calculs menés par Bernoulli pour déterminer les vitesses de vidange. Celle-ci semble effectivement être un élément indispensable au calcul, d'après l'énoncé du théorème proposé par Bruhat.

Dans l'*Hydrodynamica*, la discussion autour du problème de la contraction de la veine tient une place importante (3.6) et peut nous indiquer quel rôle Bernoulli accorde à la pression. Ce problème se pose dans les termes suivants : à l'orifice-même du vase, on sait que le parallèlisme des tranches n'est pas respecté : le jet d'eau sortant se contracte et devient à peu près cylindrique, avant de subir de nouvelles variations de forme. À quelle section du faisceau doit-on se placer pour évaluer la vitesse de l'écoulement sortant ?

En pratique, le meilleur accord théorie-mesures est obtenu au niveau de la veine contractée, où le jet redevient approximativement cylindrique. C'est la position que défend Bernoulli (en opposition aux théories antérieures de Newton). On la justifierait aujourd'hui en affirmant qu'au niveau de la veine contractée, l'équilibre de pression est établi entre l'air et le jet, et par conséquent, il s'agit d'une région où la pression dans le jet est la même qu'à la surface libre dans le vase. Donc, si l'on utilisait la forme actuelle de l'équation de Bernoulli entre ce point et la surface, les termes piézométriques s'annulent l'un l'autre (2.2).

Il est possible que Bernoulli conçoive que la pression puisse intervenir dans l'équation qui associe la vitesse et la cote. On trouve en effet la phrase suivante (3.6) : " Et de cette compression, il est fait qu'elle entraîne les autres [particules] en contradiction, de sorte que l'eau déjà coule, soit encore accélère devant l'ouverture". Si la formulation n'est pas claire, elle peut laisser penser que l'idée de pression ("compressione" dans le texte original - il s'agit donc bien de la même racine) soit associée à une accélération de l'écoulement, ce qui est bien ce que traduit le théorème (une diminution de pression entraîne une augmentation de vitesse, à cote sensiblement constante). Par ailleurs, dans cette même *Hydrodynamica*, Bernoulli pose les premiers éléments de la théorie cinétique des gaz, qui permet d'associer la pression au mouvement des particules et donc à leur énergie. Nous nous garderons toutefois d'être trop affirmatif sur le rôle qu'accorde Bernoulli à cette grandeur pour la conservation des forces vives, et il serait utile de trouver d'autres textes qui soient éclairants sur la conception que Bernoulli a de la pression dans un écoulement.

Dans le *Traité de l'Équilibre et du Mouvement des Fluides*, il est là-encore difficile de voir combien l'auteur est proche de comprendre le rôle que joue la pression dans l'écoulement. D'une part, d'Alembert semble voir que la pression qui s'exerce sur la paroi est de même nature que celle qui règne au sein du fluide (4.5).

Par ailleurs, lorsqu'il recherche la vitesse de l'écoulement, il procède en utilisant la conservation des forces vives ainsi qu'on l'a dit précédemment. Dans le cadre d'un écoulement prenant en compte une pesanteur g, cela se traduit par (4.2) :

$$\int dx.(gdt - dv) = 0$$

Le terme de pression, correspondant à l'énergie élastique du fluide, est bel et bien absent ; d'Alembert ne semble donc pas avoir conscience du rôle prépondrant que la pression joue dans la détermination de la vitesse de l'écoulement.

Pourtant, dans l'article 146, d'Alembert, calculant la pression qui s'exerce sur la paroi du vaisseau, prend en compte l'incidence de la vitesse de l'écoulement, ce qui laisserait supposer une interdépendance des deux grandeurs. Cette question mériterait donc un examen plus approfondi également chez cet auteur.

Au contraire, la théorie d'Euler ne laisse aucun doute sur la fonction de la pression. La notion prend là encore un sens extrêmement proche de celui qu'elle a dans les ouvrages actuels : elle apparaît comme la force par unité de surface qu'exerce une particule de fluide sur ses voisines, et peut être décrite à l'aide d'un champ scalaire. Euler établit l'équation fondamentale de la conservation de la masse dans le fluide. On n'est pas surpris de voir apparaître explicitement l'hypothèse d'incompressibilité, et son incidence sur cette équation : pour un fluide incompressible, la conservation de la masse est équivalente à la conservation du débit.

6. La question des dimensions

On peut évoquer un détail caractéristique des travaux de Bernoulli ou d'Alembert qui les distingue des auteurs actuels : certaines formules de leurs traités seraient aujourd'hui qualifiées d'inhomogènes. Prenons un exemple tiré de l'*Hydrodynamica* (§9 de la section IV) : $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$, équation donnant l'expression d'un temps de vidange d'une couche infinitésimale. Ici, v et x dsignent des longueurs, et t un temps. Cela traduit que des relations que l'on qualifierait de relations de proportionnalité sont ici notées comme des égalités.

Cela n'a en fait rien de surprenant dans la mesure où l'uniformisation des notions de dimensions des grandeurs physiques n'a pas encore eu lieu. Il n'y a notamment pas d'accord sur la question des étalons (de longueur, de masse...).

On sait que les physiques galiléenne et newtonienne se sont construites essentiellement autour de règles de rapports. Par exemple, la force de pesanteur évolue comme l'inverse des distances au carré, ce que l'on peut noter de manière plus concise : $\frac{F(r)}{F(r')} = \frac{r'^2}{r^2}$. Cela permet de s'affranchir des questions d'étalons. On peut voir chez Bernoulli et d'Alembert des formulations héritées de cette forme de raisonnement, on a ainsi déjà évoqué les vitesses en raison inverse de la section.

A ce titre, on peut penser que les mesures réalisées sur un dispositif exprimental pour vérifier une loi ne peuvent être comparées qu'entre elles. Autrement dit, les mesures de validation sont, en pratique, des mesures de rapport des grandeurs, et l'étalonnage est propre à chaque dispositif expérimental.

Illustrons cette idée à l'aide d'un exemple proche des questions soulevées ici : supposons qu'on trouve une vitesse d'écoulement v proportionnelle à $\sqrt{h}$, avec h la hauteur de la colonne de fluide au-dessus de la veine d'écoulement. L'absence d'universalité sur les notions de dimensions ne permettra pas de s'accorder précisément sur le facteur de proportionnalité. Mais sur un même dispositif, on pourra vérifier que la loi suivie est bien telle que le rapport $\frac{v}{\sqrt{h}}$ soit une constante.

Cette observation peut-être associée au fait que ces auteurs travaillent souvent avec le tracé géométrique des grandeurs qu'ils utilisent. Il y a parfois même confusion dans les notations de la grandeur et de la construction géométrique qui la caractérise sur le graphe. Ce tout dernier point est une caractéristique significative du style de Bernoulli ; on en trouve un exemple dans la Section III, §6 de l'*Hydrodynamica* : la construction de la surface permettant d'évaluer la montée potentielle. On n'observerait pas un tel discours, par exemple, chez Euler.

Quoique cette hypothèse nécessiterait une analyse bien plus approfondie, on peut suggérer que l'utilisation des tracés géométriques est révélatrice d'une certaine conception de l'usage d'outils analytiques en physique.

On serait tenté d'affirmer que pour Bernoulli, la grandeur physique est assimilée à la valeur reportée en chaque point sur le tracé. Si cette idée est légitime, elle masque la possibilité de comprendre la grandeur comme une fonction, susceptible de varier par la modification de nombreux paramètres, dont seulement quelques uns sont indépendants. Les hypothèses simplificatrices sur le système visant avant tout à réduire le nombre de ces degrés de liberté.

C'est pourquoi la question des fonctions de plusieurs variables s'accorderait difficilement avec une telle conception. Mais l'hypothèse du parallélisme des tranches permet de contourner cette difficulté. En revanche, si Euler ne surmonte pas l'obstacle de la résolution pratique des équations qu'elles amènent, il considère de telles fonctions, et utilise le concept, étroitement lié, de dérivées partielles.

Il semble (mais cette interprétation demanderait, une fois de plus, vérifications) que l'idée de fonction telle qu'Euler la comprend soit virtuellement plus puissante, car la grandeur physique n'y est pas enchaînée à sa représentation graphique.

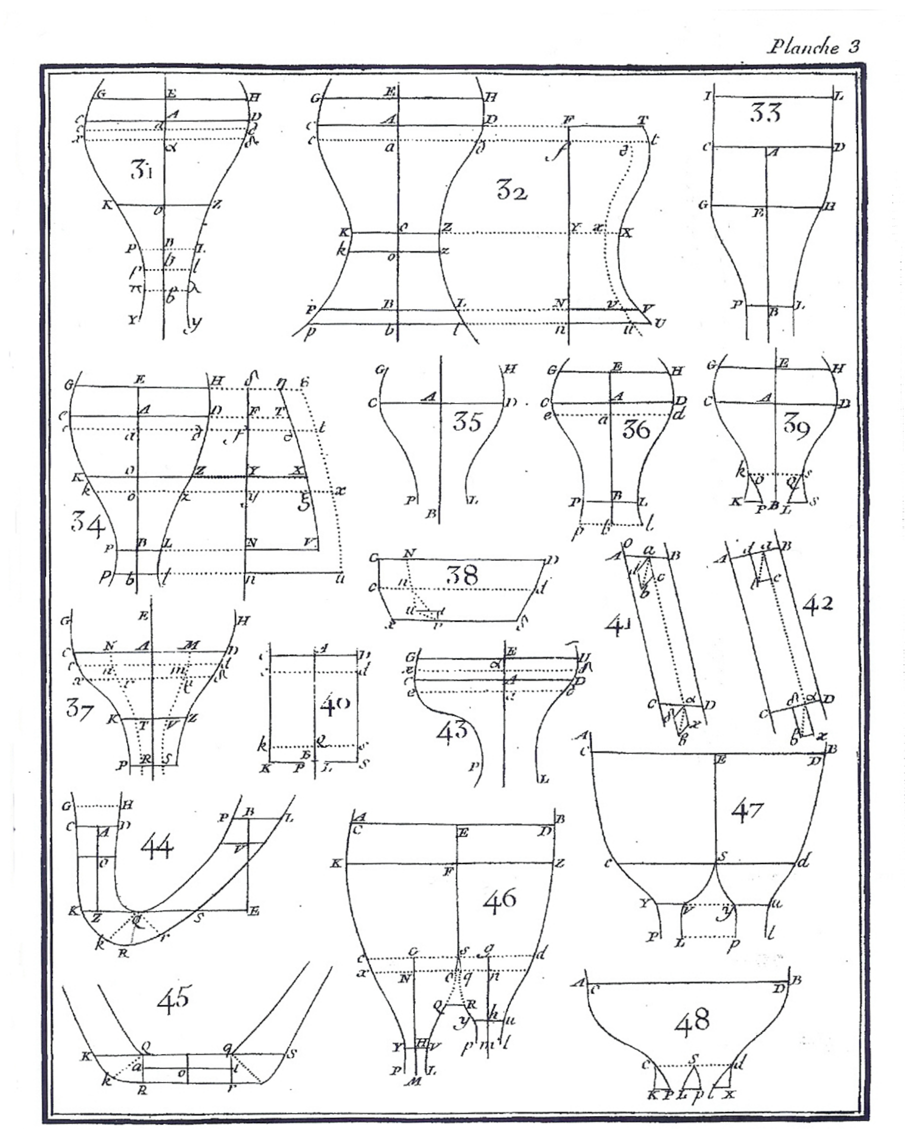

Fig. 4 – Planche extraite de (4).

Sources

(1) : Article "Hydrodynamique" de l'*Encyclopédie* (Tome VIII), par Jean Le Rond d'Alembert ; publication en 1765.
Accessible en ligne : portail.atilf.fr/encyclopedie

(2) : *Mécanique*, par Georges Bruhat ; Masson ; 6eme édition ; 1967.
(2.1) : §317.
(2.2) : §352.

(3) : *Hydrodynamica sive De viribus et motibus fluidorum commentarii*, par Daniel Bernoulli ; 1738.
Accessible en ligne : num-scd-ulp.u-strasbg.fr :8080
Traduction employée de Jean Peyroux : Hydrodynamique (2004).
(3.1) : Section I, §3.
(3.2) : Section III, §1.
(3.3) : Section III, §8.
(3.4) : Section III, §12.
(3.5) : Section IV, §10.
(3.6) : Section IV, §3.
(3.7) : Section III, §2.
(3.8) : Section IV, §3.

(4) : *Traité de l'Équilibre et du Mouvement des Fluides*, Préface et Livre Second par Jean Le Rond d'Alembert ; 1744.
Accessible en ligne : gallica.bnf.fr
(4.1) : Article 25.
(4.2) : Article 100.
(4.3) : Article 83.
(4.4) : Articles 120 125.
(4.5) : Préface, page xv.

(5) : *Principe Généraux du Mouvement des Fluides*, par Leonhard Euler ; 1755.
Accessible en ligne : www.math.dartmouth.edu

(6) : *Méchanique Analitique*, Section VIII : Du Mouvement des Fluides Incompressibles, par Joseph-Louis Lagrange ; 1787.
Accessible en ligne : gallica.bnf.fr